— Wahlthema – Maxwellsche Gleichungen —

→ Es gibt 5 Gleichungen: Sie beischreiben das elektromagnetische Feld, seine Erzeugung, Eigenschaften und Wirkungen und geben uns Auskunft über die gesamten Gesetzmäßigkeiten der Elektrodynamik.
→ Es sind die 4 Maxwell-Gleichungen und die Lorentz-Kraft:

— Lorentz–Kraft —

Elektrostat. Kraft:	**Magnet. Kraft:**	**Gesamtkraft**
$F_e = Q \cdot E$	$F_m = Q \cdot v \times B$	$F_{ges} = F_e + F_m = Q(E + v \times B)$

— Maxwell–Gleichungen —

Integrale Form	**Differentielle Form**	**Physikalische Bedeutung**
I	**Gaußsches Gesetz**	
$\oint_S D dA = Q_{innen}$ $\Rightarrow \oint_S E dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q_{innen}$	$divD = \rho \Rightarrow divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\nabla \cdot D = \rho \Rightarrow \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Eine ruhende elektrische Ladung Q erzeugt um sich herum ein elektrisches Feld, die Feldlinien münden in der Ladung. → elektrisches Quellenfeld
II	**Gaußsches Gesetz des Magnetismus**	
$\oint_S B dA = 0$	$divB = 0 \Rightarrow \nabla \cdot B = 0$	Magnetfelder sind quellenfrei, es gibt nur magnetische Wirbelfelder, es gibt keine: - magn. Monopole, - magn. Ströme, - magn. Ladungen magn. u. elektr. Erscheinungen sind nicht symmetrisch
III	**Faradaysches Induktionsgesetz**	
$\oint_C E dl = -\frac{d}{dt} \int_S B dA = -\frac{d\Phi}{dt}$	$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t}$ $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	Zeitl. veränderte Magnetfelder sind von elektrischen Wirbelfelder umgeben.
IV	**Ampèresches Gesetz**	
$\oint_C B dl = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S E dA$ $\oint_C H dl = \frac{d}{dt} \int_S D dA + I$	$\nabla \times B = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ $rotH = \frac{dD}{dt} + j$	Ströme und zeitl. veränderte Felder sind von magnet. Wirbelfeldern umgeben.

Materialgleichungen	Symbole / Einheiten / Konstanten		
$D = \varepsilon \cdot E$	*D* – elektr. Flussdichte, elektr. Verschiebung		*t* – Zeit
$B = \mu \cdot H$	*B* – magn. Flussdichte, magn. Induktion		ρ - Raumladungsdichte
$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$	*E* – elektr. Feldstärke	*I* – elektr. Stromstärke	*j* – elektr. Stromdichte
	H – magn. Feldstärke	*dA* – (vektorielles) Flächenelement	
	Q – Ladung	*dl* – (vektorielles) Längenelement	
	ε – Permittivität	ε_0 – elektr. Feldkonstante = $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m	
	μ – Permeabilität	μ_0 – magn. Feldkonstante = $1{,}26 \cdot 10^{-6}$ H/m	

Erläuterung der einzelnen Maxwell–Gleichungen

I. Gaußsches Gesetz

1. Definition der Raumladungsdichte ρ:

   Raumladungsdichte r gibt das Verhältnis von Ladung zu Volumen an:

   $$\rho = \frac{dq}{dV} \quad A = \int_s dA \quad U = \oint_c dA$$

2. Definition des elektrischen Flusses:

   $$\Phi_{ges} = \oint_S E dA = \frac{q_{innen}}{\varepsilon_0}$$

   Der Gesamtfluss durch eine beliebige Oberfläche beträgt $1/\varepsilon_0$ multipliziert mit der Gesamtladung, die die Oberfläche umschließt.
   Es ist dabei völlig egal, wie groß die Fläche A der umrandenden Kurve C gewählt wird, es wird immer die gleiche Anzahl an Feldlinien gezählt (→ ∞).
   Das Gaußsches Gesetzt gilt für
   - beliebige Oberflächen,
   - beliebige Ladungsverteilungen,

   es kann insbesondere bei symmetrischen Sonderfällen zur Vereinfachung herangezogen werden.

3. Berechnung des elektrischen Feldes mit dem Gaußschen Gesetz
   a. Elektrisches Feld nahe einer Punktladung

   $$\Phi_{ges} = \oint E \cdot n\, da = \oint E_r dA = E_r \oint dA$$

   vereinfachend durch die Symmetrie der Kugel mit der Oberfläche: $O = \oint dA = 4\pi r^2$
   - radiales E-Feld
   - Kugeloberfläche mit Radius r („Igelgleichung")
   - radialer Anteil des E-Feldes: $E_n = E \cdot n = E_r$.

   Daraus folgt: $E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$.

   Herleitung des **Coulombschen Gesetzes** mit $F = Q \cdot E_r$.

   b. Herleitung der differentiellen Form des Gaußschen Gesetzes:

   $$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} dq = \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r^3}\boldsymbol{r}\, dV \text{ ,}da\ \rho = \frac{dq}{dV}$$

   Einheitsvektor

   $$r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

   $$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\int_V dV}{\frac{3V}{4\pi}}\boldsymbol{r} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\boldsymbol{r} \quad ,da \quad \int_V dV = V$$

   $$divE = \nabla \cdot E = \nabla \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3} r = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\nabla \cdot r = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x,y,z)$$

   $$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x},\frac{\partial y}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial z}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\cdot(1+1+1) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\cdot 3 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \underline{\underline{divE = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}}\ .$$

   In dieser Form wird diese Gleichung auch Poisson-Gleichung genannt wird.

II. Gaußsches Gesetz

Viel kann man dazu nicht sagen.

Das Gaußsche Gesetz des Magnetismus geht auf die Eigenschaft von magnetischen Feldern ein.

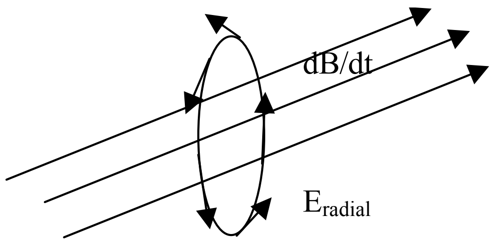
- Es gibt keine magnetischen Ladungen.
- Es gibt keine magnetischen Ströme
- Es gibt keine magnetischen Monopole
- Die magnetischen Feldlinien sind stets geschlossen.

III. Faradaysches Induktionsgesetz

Die Änderung des magnetischen Flusses erzeugt („induziert“) eine Spannung, die

Induktionsspannung: $U_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad mit \quad \Phi_m = \int B\, dA$

Dabei wirkt die Regel von Lenz, die das Voreichen erklärt:
Die induzierten Ströme sind stets so gerichtet, dass sie ihrer Ursache entgegenwirken.



Ändert sich der magnetische Fluss, der eine Leiterschleife durchsetzt, dann erzeugt das ein elektrisches Feld, welches seinerseits Ursache einer Spannung ist. Durch die Lenzsche Regel ergibt sich die linke Hand Regel (Linksschraube).

Allgemeine Formulierung des Faradayschen Gesetzes:

$$U_{ind} = \oint_C E\, dl = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Das Elektrische Feld verläuft tangential zum Leiter es ist daher nicht konservativ.

Beispiel: Leitender Stab mit der Länge l, der sich senkrecht zum Magnetfeld B bewegt induziert eine Spannung mit dem Betrag:

$$|U| = \frac{d_\Phi m}{dt} = B\, l\, v$$

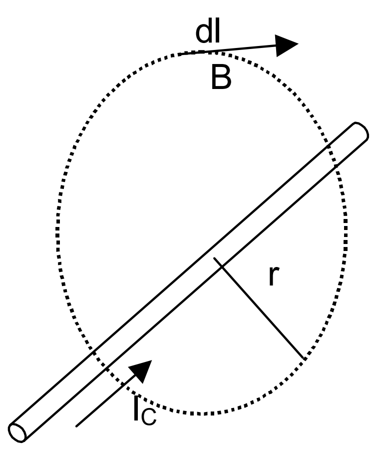
Wird in einem elektrischen Leiter ein Kreisstrom induziert, der aufgrund einer magnetischen Flussänderung erzeugt wird, dann bezeichnet man diese als Wirbelströme.

IV. Ampèresches Gesetz (Ampèresches Verkettungsgesetz, Durchflutungsgesetz)

Für eine beliebige geschlossene Kurve gilt: $\oint_C B\, dl = \mu_0 I_C$.

Dabei seien die Ströme I_C stetig, sie beginnen oder enden nicht an einem bestimmten Raumpunkt.

Unendlich langer, gerader, stromdurchflossener Leiter:

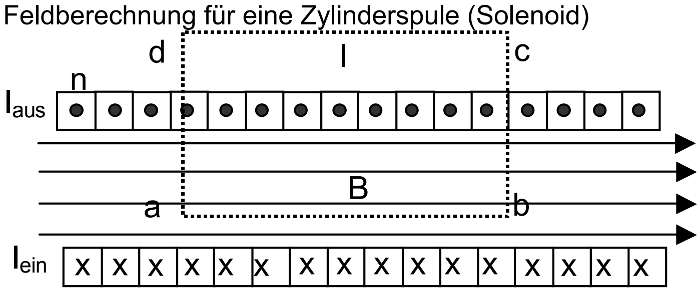


$$\oint_C B\, dl = B \oint_C dl = \mu_0 I_C$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Feldberechnung für eine Zylinderspule (Solenoid)



$$\oint_C B\, dl = \mu_0 I_C$$

$$\oint_C B\, dl = l \left(\oint_a^b B\, dl + \underset{dl \perp B}{\oint_b^c B\, dl} + \underset{H=0}{\oint_c^d B\, dl} + \underset{dl \perp B}{\oint_d^a B\, dl} \right) = \mu_0 \cdot n \cdot I_C \cdot l$$

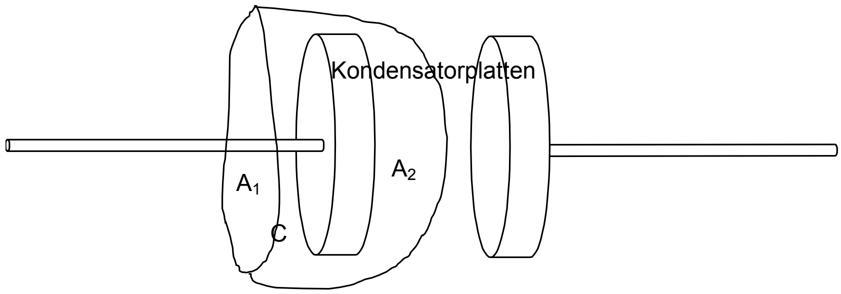
$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I_C$$

Außerhalb der Spule ist das magnetische Feld inhomogen, da l → ∞ geht H(B) → 0.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes, welches das magnetische Feld von Strömen beschreibt:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl \times \frac{\mathbf{r}}{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl \times \mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl \times \mathbf{r}}{r^3} .$$

Maxwellscher Verschiebungsstrom



Das Ampèresche Gesetzt gilt nur für nichtunterbrochene Ströme.
Es wird dabei keine Aussage gemacht über die Form der Fläche A, die von der Kurve C umrandet wird.
Die Fläche A_1 und A_2 sind beide von C umrandet, A_2 ist jedoch nicht eben. Die Fläche A1 wird vom Ladestrom I durchflossen, jedoch nicht die Fläche A_2. Demnach wäre für das Kurvenintegral für A_1 der Wert $\mu_0 I$, für A_2 wäre es 0.
Die Mehrdeutigkeit für den Wert des Kurvenintegrals ist problematisch.

Daher muss das Ampèresche Gesetz dahingehend verallgemeinert werden, dass es dieser Problematik genügt.
Maxwell ersetzt I aus $\mu_0 I$ durch die Summe aus Leitungsstrom I und dem Maxwellschen Verschiebungsstrom I_V:

$$I_V = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}.$$

Der Maxwellsche Verschiebungsstrom wird so genannt, weil Ladungen verschoben werden (z.B. von den Kondensatorplatten).

Verallgemeinertes Ampèresches Gesetz: $\oint_C B\, dl = \mu_0 (I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt}$.

Die Summe aus $I + I_V$ stellt dann einen verallgemeinerten Strom dar. Die Mehrdeutigkeit wird nun darum behebt, dass um die Flächen jeweils der gleiche verallgemeinerte Strom fließen muss.
Falls in das Volumen ein Nettoleitungsstrom von I herausfließt, dann muss aus dem zweiten Volumen ein Netto-Verschiebungsstrom I_V wieder herausfließen!

Elektrische Stromdichte: $j := \frac{dI}{dA}$

Differentielle Form der IV. Maxwellgleichung (genaue Herleitung siehe Tipler):

$$\nabla \times B = \mu_0 \cdot j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = I + I_V$$