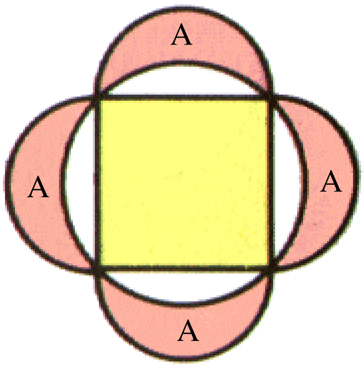
Übungsaufgaben Mathematik 12.1

<u>Grundkurs + [Leistungskursaufgaben]</u>

1. Berechnen Sie anhand der Möndchen des Hippokrates folgenden Flächeninhalt (A).



2. Es sei $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   a) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ im Intervall $[0;x]$ die Flächeninhaltsfunktion $A(x)$. Benutzen sie dabei sowohl $\lim_{n\to\infty} O_n(x)$ (Grenzwert der Obersumme) als auch $\lim_{n\to\infty} U_n(x)$ (Grenzwert der Untersumme) und zeigen Sie somit $\lim_{n\to\infty} O_n(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x) = A(x)$.

   b) [Beweisen Sie die Summe mit der Methode der vollständigen Induktion.]

3. Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = x^4$ im Intervall $[0;1]$ den Flächeninhalt mit der Streifenmethode des Archimedes:

   a) annähernd für $n = 15$, mit der Obersumme sowie der Untersumme.

   b) [exakt mit $\lim_{n\to\infty} O_n \equiv A_{exakt}$ zeigen Sie somit den Sachverhalt $U_{15} \leqslant A_{exakt} < O_{15}$, beweisen Sie fernen mit vollständiger Induktion die folgende Summe].

   Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

4. Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ die Flächen in den Intervallen $[0;2]$, $[0;4]$ sowie $[2;4]$.

5. [Leiten Sie die allgemeine Flächeinhaltsformel $A(x)$ für eine achsensymmetrische Funktion $f(x) = x^g$ (mit g = gerade Zahl) im Intervall $[-x;x]$ her, setzen sie hier $g = 2$, benutzen Sie die Obersumme mit $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und nutzen Sie dabei die geometrischen Verhältnisse!]