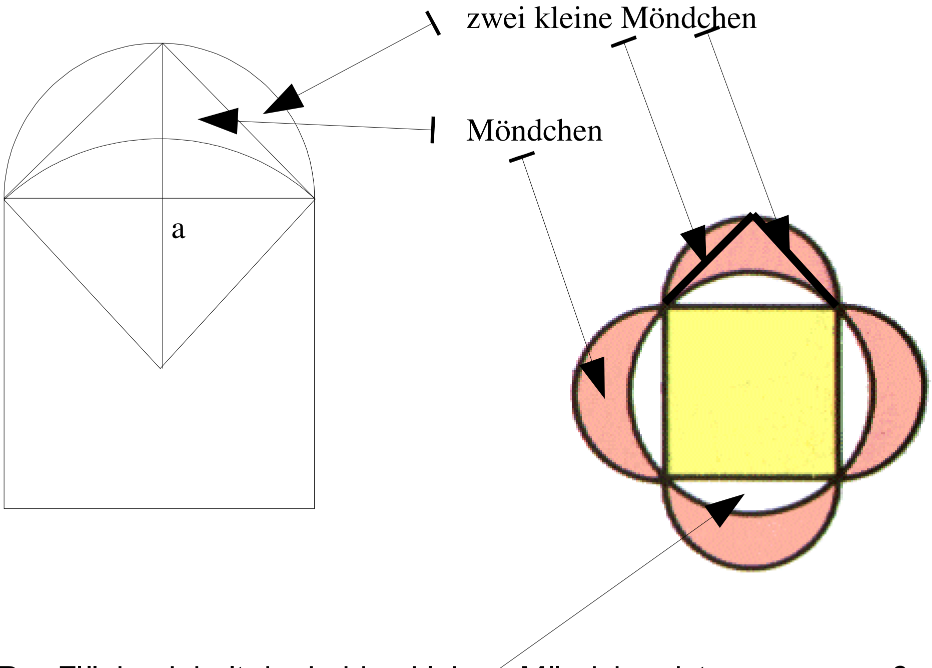
Lösungen

1.



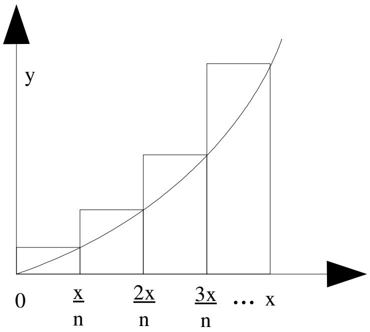
Der Flächeninhalt der beiden kleinen Möndchen ist genauso groß wie der Flächeninhalt der weißen Fläche („Möndchen des Hippokrates“).

Halbkreis	$r=\frac{a}{2} \qquad A_{Halbkreis}=\frac{\pi \cdot r^2}{2}=\frac{\pi \cdot a^2}{2 \cdot 4}=\frac{\pi}{8} \cdot a^2$
Dreieck	$A_{Dreieck}=\frac{1}{2} \cdot g \cdot h=\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a=\frac{1}{4} \cdot a^2$
zwei kleine Möndchen	$A_{zwei\,kleine\,Möndchen}=A_{Halbkreis}-A_{Dreieck}$ $A_{zwei\,kleine\,Möndchen}=\frac{\pi}{8} \cdot a^2-\frac{1}{4} \cdot a^2=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) \cdot a^2=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{2}{8}\right) \cdot a^2=\left(\frac{\pi-2}{8}\right) \cdot a^2$
Möndchen	$A_{Möndchen}=A_{Halbkreis}-A_{zwei\,kleine\,Möndchen}$ $A_{Möndchen}=\frac{\pi}{8} \cdot a^2-\frac{\pi-2}{8} \cdot a^2=\frac{\pi-\pi+2}{8} \cdot a^2=\frac{2}{8} \cdot a^2=\frac{1}{4} \cdot a^2$
Gesamte Fläche	$A_{ges}=4 \cdot A_{Möndchen}=4 \cdot \frac{a}{4} \cdot a^2=a^2$

Der Flächeninhalt der vier Möndchen ist also genauso groß wie der Flächeninhalt der Quadrates (A = a²).

2.

Obersumme:



$f(x)=\frac{1}{2}x^3$

Nach der Streifenmethode des Archimedes kann folgender Ansatz aufgestellt werden:

$$O_n=\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1x}{n}\right)^3+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n}\right)^3+\cdots+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^3+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n\cdot x}{n}\right)^3$$

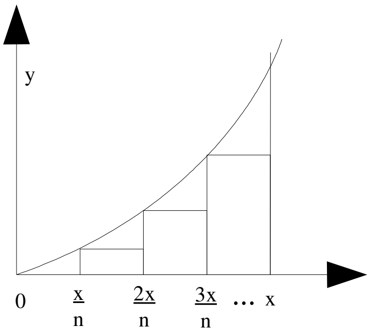
$$O_n=\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\cdot\left[1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3\right]$$

$$O_n=\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$O_n=\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{n^2+2n+1}{n^2}=\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}O_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{x^4}{8}$$

Untersumme:



$f(x)=\frac{1}{2}x^3$

Umformen der Summe:

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^3=0^3+1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=\frac{(n-1)^2\cdot n^2}{4}$$

Nach der Streifenmethode des Archimedes kann folgender Ansatz aufgestellt werden:

$$U_n=\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{0x}{n}\right)^3+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1x}{n}\right)^3+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n}\right)^3+\cdots+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^3$$

$$U_n=\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\cdot\left[0^3+1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3\right]$$

$$U_n=\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\cdot\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$$U_n=\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2}=\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{n^2-2n+1}{n^2}=\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x^4}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{x^4}{8}$$

Daher gilt: $\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{x^4}{8}=\lim_{n\to\infty}O_n=\frac{x^4}{8}\equiv A(x)=\frac{x^4}{8}$.

2. b

Gezeigt werden soll:

$$\boxed{s_n \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqslant n_0}$$

1. Schritt

Induktionsanfang (IA):

$$s_1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n=1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \Rightarrow \text{WAHR}$$

2. Schritt

Induktionsschritt:

$$\boxed{s_n \Rightarrow s_{n+1}}$$

Induktionsvoraussetzung (IV):

$$s_n \text{ gilt für ein } n \geqslant n_0, \quad \text{d.h. } 1^3 + 1^3 + 3^3 + \cdots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Induktionsschluss (IS):

Dann muss auch s_{n+1} gelten:

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3}_{\text{IV: } \frac{n^2(n+1)^2}{4}} + (n+1)^3$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4 \cdot (n+1)^2 (n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2 + 4 \cdot (n+1)^2 (n+1)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot \left(n^2 + 4 \cdot (n+1)\right)}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot \left(n^2 + 4n + 4\right)}{4} = \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 ((n+1)+1)^2}{4} = \sum_{n=1}^{n+1} k^3$$

Damit gilt: $\sum_{n=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Mit diesen Schritten ist s_n für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, da

- s_1 WAHR
- s_1 => s_{n+1} => „Dominoeffekt“

3. a

benötigte Summen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

daher gilt folgendes:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 = \frac{(n-1)((n-1)+1)\left(2(n-1)+1\right)\left(3(n-1)^2+3(n-1)-1\right)}{30}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 = \frac{n(n-1)(2n-1)\left(3(n-1)^2+3n-4\right)}{30}$$

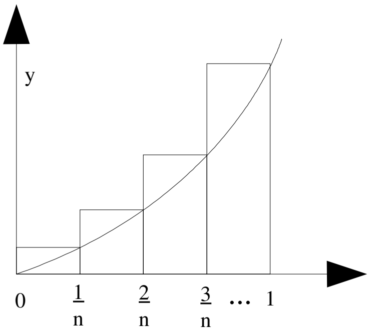
Obersumme:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^4 \\
&O_{15} = \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^4 + \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{2}{15}\right)^4 + \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{3}{15}\right)^4 + \cdots + \frac{1}{15}\cdot(1)^4 \\
&\quad = \frac{1}{15^5}\left(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + 15^4\right) \\
&\quad = \frac{1}{15^5}\left(\frac{15\cdot 16\cdot 31\cdot(3\cdot 15^2+45-1)}{30}\right) \\
&\quad = 0{,}235
\end{aligned}$$

Untersumme:

$$\begin{aligned}
&U_{15} = \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{0}{15}\right)^4 + \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^4 + \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{2}{15}\right)^4 + \cdots + \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^4 \\
&\quad = \frac{1}{15^5}\left(0^4 + 1^4 + 2^4 + \cdots + 14^4\right) \\
&\quad = \frac{1}{15^5}\left(\frac{15\cdot 14\cdot 29\cdot(3\cdot 14^2+45-4)}{30}\right) \\
&\quad = 0{,}168
\end{aligned}$$

3. b1



$$\boxed{f(x)=x^4}$$

Nach der Streifenmethode des Archimedes kann folgender Ansatz aufgestellt werden:

$$O_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^4+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{(n-1)}{n}\right)^4+\frac{1}{n}\cdot(1)^4$$

$$O_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4\cdot\left[1^4+2^4+\cdots+(n-1)^4+n^4\right]$$

$$O_n=\frac{1}{n^{15}}\cdot\left[\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\right]$$

$$O_n=\frac{1}{30}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n}\cdot\frac{(3n^2+3n-1)}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{30}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}=0{,}2$$

Damit wäre gezeigt:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} U_{15} & \leqslant & A_{15,exakt}=0{,}2 & < & O_{15} \\ 0{,}168 & < & 0{,}2 & < & 0{,}235 \end{array}}$$

3. b2 Gezeigt werden soll: $\boxed{s_n \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqslant n_0}$

1. Schritt

Induktionsanfang (IA):

$$s_1 = \sum_{k=1}^{1} k^3 \;= 1^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{(2)(3)(5)}{30} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n=1} k^3 \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \;\Rightarrow\; \text{WAHR}$$

2. Schritt

Induktionsschritt: $\boxed{s_n \Rightarrow s_{n+1}}$

Induktionsvoraussetzung (IV):

$$s_n \text{ gilt für ein } n \geqslant n_0, \quad \text{d.h. } 1^4+1^4+3^4+\cdots n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Induktionsschluss (IS):

Dann muss auch s_{n+1} gelten:

$$\underbrace{1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots n^4}_{\text{IV: } \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}+(n+1)^4$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+(n+1)^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+\frac{30\cdot(n+1)^4}{30}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)+30\cdot(n+1)^4}{30} = \frac{1}{30}\left[n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)+30\cdot(n+1)^4\right]$$

$$= 1/30\left[n(n+1)(6n^3+6n^2-2n+3n^2+3n-1)+30(n+1)^4\right]$$

$$= 1/30\left[n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)+30(n+1)^4\right]$$

$$= 1/30\left[n(6n^4+9n^3+n^2-n+6n^3+9n^2+n-1)+30(n+1)^4\right]$$

$$= 1/30\left[n(6n^4+15n^3+10n^2-1)+30(n+1)^4\right]$$

$$= 1/30\left[6n^5+15n^4+10n^3-n+30(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)\right]$$

$$= 1/30\left[6n^5+15n^4+10n^3-n+30n^4+120n^3+180m^2+120n+30\right]$$

$$= 1/30\left[6n^5+45n^4+130n^3+180n^2+119n+30\right]$$

$$= 1/30\left[6n^5+39n^4+91n^3+89n^2+30n+6n^4+39n^3+91n^2+89n+30\right]$$

$$= 1/30\left[(n+1)(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)\right]$$

$$= 1/30\left[(n+1)(6n^4+27n^3+37n^2+15n+12n^3+54n^2+74n+30)\right]$$

$$= 1/30\left[(n+1)(n+2)(6n^3+27n^2+37n+15)\right]$$

$$= 1/30\left[(n+1)(n+2)(6n^3+18n^2+10n+9n^2+27n+15)\right]$$

$$= 1/30\left[(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5)\right]$$

$$= 1/30\left[(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+6n+3+3n+3-1)\right]$$

$$= \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)\left(3(n+1)^2+3(n+1)-1\right)}{30} = \sum_{n=1}^{n+1} k^4$$

Damit gilt: $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

4.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3 \quad \Rightarrow \quad A(x)=\frac{1}{8}x^4 \text{ siehe Aufgabe 2!}$$

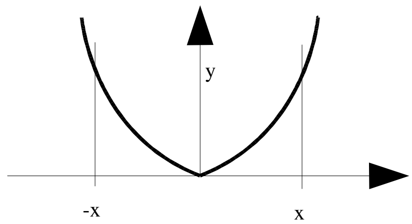
$$A(2)-A(0)=A(2)=\frac{1}{8}(2)^4=2$$

$$A(4)-A(0)=A(4)=\frac{1}{8}(4)^4=32$$

$$A(4)-A(2)=32-2=30$$

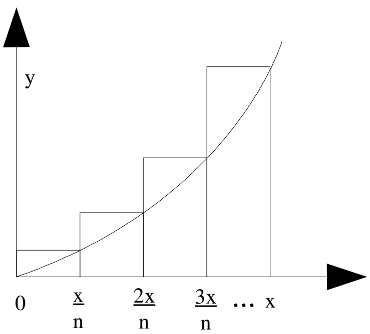
5.

$$f(x)=x^g \;,\; g=2 \quad \Rightarrow \quad f(x)=x^2$$



Fläche [-x;0] genauso groß wie Fläche [0;x], da achsensymmetrisch zu y!

=> zunächst Berechnung der Fläche [0;x]



$$\boxed{f(x)=x^2}$$

$$O_n=\frac{x}{n}\cdot\left(\frac{1x}{n}\right)^2+\frac{x}{n}\cdot\left(\frac{2x}{n}\right)^2+\cdots+\frac{x}{n}\cdot\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^2+\frac{x}{n}\cdot\left(\frac{n\cdot x}{n}\right)^2$$

$$O_n=\frac{x}{n}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2\cdot\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\right]$$

$$O_n=\left(\frac{x}{n}\right)^3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$O_n=\frac{x^3}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n}=\frac{x^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{2\cdot x^3}{6}=\frac{x^3}{3}$$

$$A_{ges} \text{ im Intervall } [-x;x] \text{ daher:} \qquad A_{ges}(|x|)=\frac{2}{3}x^3$$