Übersicht und Wiederholung Proportionalität / Antiproportionalität

Antiproportionalität

Bei einem Losgewinn erhält eine Person 28 DM. Wieviel erhalten 2, 3, 4, 5, ... Personen ? Kann man das Ergebnis graphisch darstellen?

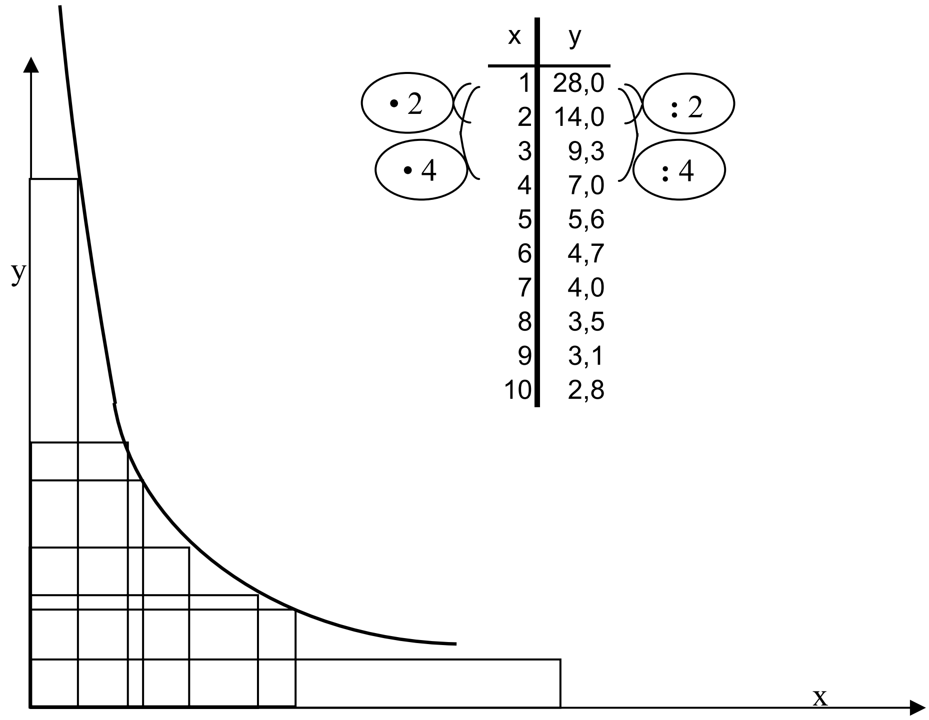
A) Je mehr Personen, desto kleiner der Gewinn
B) [Je weniger Personen, desto größer der Gewinn]

$\left.\begin{array}{l} \text{A)} \\ \text{B)} \end{array}\right\}$ je nach Fragestellung

Ansatz:

(1 / 28) (2 / x)

$2 \cdot y = 1 \cdot 28$
$2y = 28$
$y = 14$



x	y
1	28,0
2	14,0
3	9,3
4	7,0
5	5,6
6	4,7
7	4,0
8	3,5
9	3,1
10	2,8

• 2 • 4 : 2 : 4

Man sieht, dass man die entsprechenden Werte graphisch darstellen kann.
Man verwendet dazu das Koordinatenkreuz, trägt die Werte ein und zeichnet einen
→ Ausgleichsgraph / Interpolation.

Antiproportionalität dabei die Möglichkeit, dass sich Flächen zeichnen lassen, die bei den Punkten der Paare liegen. Diese Flächen sind alle gleich groß, so dass man unbeschwert über das Produkt die entsprechenden gesuchten Werte berechnen kann.

Bei Antiproportionalität ist das Produkt der entsprechenden Paare, wir sprechen hier von Wertepaaren, immer gleich. Somit rechnen wir den in der Aufgabenstellung gesuchten Wert über die Produkte aus.

Übersicht und Wiederholung Proportionalität / Antiproportionalität

Proportionalität

Für 0,5 l Milch bezahlt man 0,75 DM. Wieviel kosten 2 l? Eine Graphik ist zu erstellen.

a) Je mehr Milch, desto mehr DM
b) [Je weniger Milch, desto weniger DM]

$\Big\}$ je nach Fragestellung

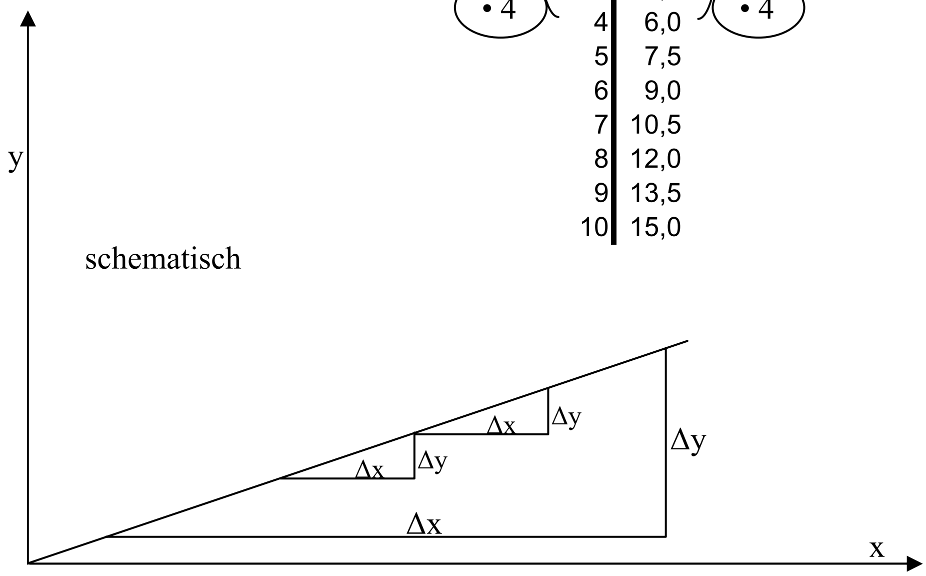
Ansatz:

(0,5 / 0,75)   (2 / y)

$$\frac{0{,}75}{0{,}5} = \frac{y}{2}$$

y = 3,0

	x	y	
	1	1,5	
• 2	2	3,0	• 2
	3	4,5	
• 4	4	6,0	• 4
	5	7,5	
	6	9,0	
	7	10,5	
	8	12,0	
	9	13,5	
	10	15,0	



Man sieht, dass man auch hier die entsprechenden Werte graphisch darstellen kann. Es stellt sich eine lineare Funktion (Ursprungsgerade) ein.

Proportionalität zeigt bei eindeutiger Zuordnung ein konstantes Verhältnis zweier Bezugspaare zueinander. Es stellt sich bei der graphischen Darstellung eine lineare Funktion (Ursprungsgerade !) ein.
Zeichnet man entsprechende Steigungsdreiecke ein, dann kann zeigen, dass der Quotient der Werte von Bezugspaaren immer gleich ist.

Wir rechnen somit den gesuchten Wert aus der Aufgabenstellung mit Hilfe der Quotienten

Übungsaufgaben:

1. 20 Arbeiter brauchen für einen Bürgersteig 4 Stunden. Wieviel Stunden Brauchen 15 Arbeiter? Wieviel Arbeiter brauchen 3 Stunden? [Im Kopf]

2. Auf einer Rennbahn starten 4 Rennautos nacheinander bei gleicher Geschwindigkeit. Das erste Auto braucht für 400 km 2 Stunden. Wieviel braucht das dritte für eine Strecke von 950 km? [Überlegen]

3. In drei Tagen werden 50.000 Zahnbürsten produziert. Wie lange dauert die Produktion von 45.000 Zahnbürsten. Wieviel Zahnbürsten werden in einem Jahr produziert?

4. Ein Rasengrundstück von 100m² wird in einer Stunde von einem Rasenmäher gemäht. Wie lange braucht man um 450m² zu mähen. Das Grundstück von 450m² wird das nächste Mal von drei Rasenmähern gemäht, wie lang dauert dies?
[Überlegen]

5. Bei einem Decken eines Daches braucht man 5000 Ziegel. In einer Straße gibt es 70 Häuser. Wieviel Ziegel ergibt das insgesamt?

6. Ein Auto fährt 630 km in 3 Stunden. Wie lange braucht es für 210 km? Wie weit fährt es in 30 Minuten? [Im Kopf]

7. Dieses Auto fährt doppelt so schnell. Wie lange braucht es dann für 630 km. Wie lange braucht es für 210 km, wie weit fährt es in einer halben Stunde? [Im Kopf]

8. Ein Liter Wasser wiegt ca. 1 kg. Wie viele Liter wiegen 2300 kg. [Im Kopf]

9. 1,50 Meter große Menschen haben eine Schuhgröße von 40. Wie große Schuhe brauchen 1,75 m große Menschen.
[Aufpassen]

10. 400 Arbeiter bauen an einer großen Brücke. Diese Brücke soll in 10 Tagen fertig sein. Nach 5 Tagen werden aber wegen des starken Windes 100 Arbeiter erkältet. Wie lange braucht am jetzt, um die Brücke fertig zu stellen?

11. Mit drei alten Maschinen braucht man 45 Tage um ein Sortiment eines Produktes herzustellen. Nach 30 Tagen benutzt man aber noch drei neue Maschinen dazu. Wie lange dauert jetzt die Produktion des Sortimentes. Wieviel % an Zeit hat man dadurch gespart?

12. In einem Zug mit 3 Waggons werden 9300 Container Transportiert. Wegen der Marktsituation setzt man nun Züge mit 12 Waggons ein. Wieviel Container werden transportiert? Bei einem Zug mit 8 Waggons werden 75% von Containern transportiert. Wie viele sind dies? [Im Kopf]

13. Ein Vorrat von 84 Stück reicht für drei Tage. Wie lange reicht ein Vorrat von 36 Stück? Wie viel Stück muss ein Vorrat haben, der für eine Woche halten soll.

Infobogen Proportionalität

Beispiel:
„15 Brötchen kosten 3,75 DM. Wieviel DM kosten 8 Brötchen?“

Je weniger Brötchen, desto weniger DM
➔ **Proportionalität**

Lösen nach der Dreisatzmethode:

Paare: (15 / 3,75) (8 / y)

$$\frac{y}{8} = \frac{3{,}75}{15}$$

$$y = \frac{3{,}75 \bullet 8}{15}$$

y = 2 DM

Antwort: 8 Brötchen kosten 2 DM

Lösen tabellarisch (Kaufmann – Stil)

- beziehen auf 1 Wert
- Vervielfachen auf gewünschte Anzahl

	Brötchen	Preis / DM	
	15	3,75	
: 15			: 15
	1	0,25 (25 Pf)	
• 8			• 8
	8	2	

Antwort: 8 Brötchen kosten 2 DM.

Bei Proportionalität wird auf jeder Seite das gleiche gerechnet (**:** und **:** *oder* • und •)

Infobogen Proportionalität

Beispiel:
Zwei Personen gewinnen 54 DM. Wieviel Gewinn haben 6 Personen?

Je mehr Personen desto weniger Gewinn
➔ **Antiproportionalität**

Lösen nach der Produktregel:

Paare: (2 / 54) (6 / y)

2 • 54 = 6 • y | :3
y = 108 : 6 = 18

Antwort: 6 Personen würden 18 DM gewinnen.

Lösen tabellarisch (Kaufmann – Stil)

- beziehen auf 1 Wert
- Vervielfachen auf gewünschte Anzahl

	Gewinn	Personen	
	54	2	
• 2			: 2
	108	1	
: 6			• 6
	18	6	

Antwort: 8 Brötchen kosten 2 DM

Bei Antiproportionalität wird auf jeder Seite das umgekehrte gerechnet (**:** und • *oder* • und **:**)

Übungstest – Teste das Erlernte (Klasse 07)

Übung macht den Meister

Seite: _______
Datum: _______

1. Die folgende Tabelle gibt an, wieviel Meter ein Gegenstand in einer bestimmten Zeit gefallen ist. Überprüfe und begründe, ob die Zuordnung proportional ist.

Fallzeit und - strecke eines Körpers					
Sekunden	0,60	1,00	1,25	1,75	2,50
Meter	1,80	5,00	7,80	15,30	31,25

2. Ein 655 cm³ großes Stück Steinkohle wiegt 917 g.
   a) Wieviel wiegen 385 cm³, 1450 cm³ ?
   b) Welches Volumen hat ein Stück Steinkohle von 1,772 g und 3,306 kg ?

3. Familie Bauer kann 14 Tage Urlaub machen und gibt dabei 270 DM täglich aus. Wieviel Geld darf sie höchstens ausgeben, wenn sie 18 Tage bleiben möchte ?

4. Ein 18 ha (ha = Hektar) großes Waldgebiet wird von 16 Forstleuten in 30 Tagen aufgeforstet.
   a) Welche Zuordnungen bestehen zwischen den genannten Größen ?
   b) Wie lange benötigen 24 Forstleute für dieses Gebiet ?
   c) Wieviel Tage brauchen die 16 Forstleute, um ein 54 ha großes Gebiet aufzuforsten ?
   d) Wieviel Forstarbeiter benötigt man, wenn man in 120 Tagen ein 54 ha großes Gebiet bearbeiten will ? (Hinweis: Versuche einen Quotienten aus allen drei Größen, der in allen Aufgabenteilen gleich groß ist, zu finden)

5. Ein Stück Holz und ein Stück Kunststoff sind gleich schwer. Das Stück Holz hat ein Volumen von 5860 cm³. 1 cm³ Holz wiegt 0,5 g.
   Welches Volumen hat das Stück Kunststoff, wenn 590 cm³ 531 g wiegen ?
   (Hinweis: Betrachte die Zuordnung zwischen Volumen und Gewicht für 1 cm³.)

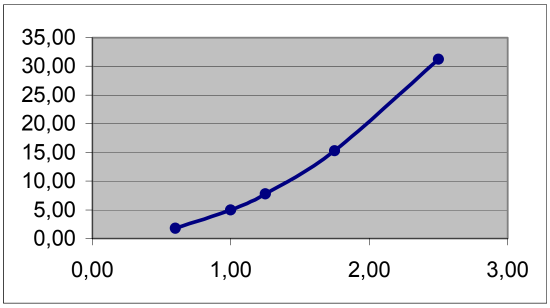
Zeit: ______
Punkte: →

Aufgabe:	1	2	3	4	a	b	c	5	Σ
Punkte Soll:	6	4	3	7	2	2	3	2	22
Ist:									

Lösungen zum Übungstest:

Zu Aufgabe 1.)

Fallzeit und - strecke eines Körpers					
Sekunden	0,60	1,00	1,25	1,75	2,50
Meter	1,80	5,00	7,80	15,30	31,25



Die Zuordnung ist nicht proportional, weil der Graph keine lineare gerade darstellt.

Zu Aufgabe 2.)

Volumen (cm³)	Gewicht (g)	Quotient	Rechnung
655	917	917 : 655 = 1,4	
385	X = *539*	X : 385 = 1,4	X = 385 • 1,4 = *539*
1450	X = *2030*	X : 1450 = 1,4	X = 1450 • 1,4 = *2030*
X = *1266*	1772	1772 : X = 1,4	X = 1772 : 1,4 = *1266*
X = *2361*	3306	3306 : X = 1,4	X = 3306 : 1,4 = *2361*

Rechnungen

```
 917:655=1,4
-655
 2620
 2620
    0
```

```
385•1,4
   3850
  +1540
   539,0
```

```
1450•1,4
  1450,0
   580,0
  2030,0
```

```
 17720:14=1265,7
-14        ≈1266
  37
 -28
   92
  -84
    80
   -70
    100
     98
```

```
 33060:14=2361,4
-28         ≈2361
  50
 -42
   86
  -84
    20
   -14
     60
     56
```

Zu Aufgabe 3.)

Bezugspaare: (14 / 270) (18 / X)

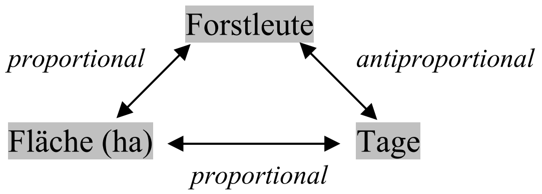
Produktregel: 14 • 270 = 18 • X

X = 210

Antwort: Sie müsste dabei täglich höchstens 210 DM ausgeben.

Zu Aufgabe 4.)

a)



<u>Bemerkung:</u>
Man findet die entsprechende Beziehung zweier Größen zueinander heraus, indem man die dritte als konstant angibt.

b)

Je mehr Forstleute, desto weniger Tage

Forstleute	Tage	ha	Produkt	Rechnung
16	30	18	30•16 = 24X	X = 30:24•16
24	X = *20*	18		X = *20*

c)

Je mehr Hektar, desto mehr Tage

Forstleute	Tage	ha	Quotient	Rechnung
16	30	18	30:18 = X:54	X = 30•54:18
16	X = *90*	54		X = *90*

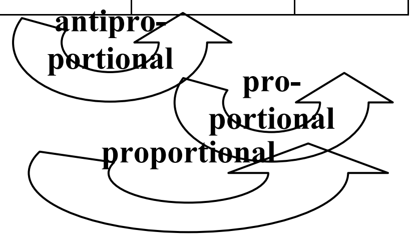
d)

Folgende Aufgabe muss in mehreren Schritten erfolgen, Erklärung folgt unten. Beachte folgenden Rechenweg.

:30 | •120

Tage	Forstleute	ha
30	16	18
:18,•30•16		
1	Y	1
:120,• 54		
120	Y	54

:18 | •54



$$Y = \frac{30\ 54\ 16}{120\ 18}$$

Y = <u>12</u>

Zu Aufgabe 5.)

Holz	Kunststoff
V = 5860 cm³ bei *11,72 kg*	V = ges.
m = 0,5 g / 1 cm³	m = 531 g / 590 cm³
m = *11720* g / 5860 cm³	m = 11720 g / X
	Quotientenregel ➔ X = *13022 cm³*

<u>Antwort</u>: Das gesuchte Stück Kunststoff hat bei dem gleichen Gewicht wie das Holzstück (11,72 kg) ein entsprechendes Volumen von 13022 cm³.

Aufgaben mit Stufen

Eine Arbeit kann von 30 Arbeitern in 65 Tagen fertiggestellt werden. Nach 30 Tagen werden 5 Arbeiter krank. Wie lange wird noch gebaut ? Wie lange wird insgesamt gebaut ?

Bei Aufgaben mit Stufen muss man zunächst überlegen, welche „Stufe" entsprechend schon erreicht ist.
Bei uns ist schon 30 Tage mit der Beteiligung von 30 Arbeitern gebaut worden. Es bleiben also noch 35 Tage zum Bauen übrig. (Der Schnitt beträgt dabei 30 Arbeiter in 35 Tagen. 30 Arbeiter hätten noch 35 Tage bauen müssen. Das ist der „neue" Richtwert.)

	Arbeiter	Tage	
	30	30	
	30	35	
: 30			• 30
	01	1050	
• 25			: 25
	25	42	
	42 Tage noch gebaut		
	72 Tage insgesamt gebaut		

Mit 4 Kartoffelsortiermaschinen kann die Kartoffelernte eines Bauern in 5 Stunden sortiert werden. Nach zwei Betriebsstunden fällt eine Maschine aus. Wie lange wird insgesamt sortiert ?

	Maschinen	Zeit	
	04	02	
	04	03	
: 04			• 04
	01	12	
• 03			: 03
	03	04	
	04 Stunden noch sortiert		
	06 Stunden insges. sortiert		

Aufgaben mit drei (und mehr) Bezugsgrößen

Erklärung

Bei Aufgaben mit drei (und mehr) Bezugsgrößen kann man nach konventionellem Verfahren vorgehen (wobei man schrittweise vorgehen kann und die nicht zu betrachtende Größe zunächst konstant setzt). Es erleichtert das Rechnen, wenn man sich folgenden Rechenweg verdeutlicht.

12 Arbeiter errichten eine Arbeit in 15 Tagen, wenn sie dabei 8 Stunden täglich arbeiteten.

Wie lange müssen 9 Arbeiter täglich arbeiten, wenn sie die Arbeit in 16 Tagen fertig zu stellen haben.

	Arbeiter	Tage	Stunden / Tag
	12	15	8
:12		:15	•8•12•15
	1	1	Y
•9		•16	:9, :16
	9	16	Y

antipro-portional

antipro-portional

antipro-portional

$$Y = \frac{8 \cdot 12 \cdot 15}{9 \cdot 16}$$

$$Y = \underline{\underline{10}}$$

9 Arbeiter müssen 10 Stunden täglich arbeiten, wenn sie die Arbeit in 10 Tagen fertig zu stellen haben.

Hier folgt die konventionelle Vorgehensweise:

12 Arbeiter, 8 h/d, 15d
9 Arbeiter, x h/d, 16d

Achtung: In beiden Rechnungen muss mit x gerechnet werden!

A) Antiproportionalität: $12 \cdot 8 = 9x$ $x = 10{,}67$ h/d

B) Antiproportionalität: $10{,}67 \cdot 15 = 16x$ $x = \underline{\underline{10 \text{ h/d}}}$

Welcher Weg dabei angewandt wird, ist beliebig, man darf den Weg anwenden, der für einen selbst am einfachsten scheint!

Übungen:

1) Wieviel Tage brauchen 10 Arbeiter bei einem Arbeitseinsatz von 6 Stunden pro Tag?
2) Wie viele Arbeiter sind erforderlich, um die Arbeit in 24 Tagen bei einem Arbeitseinsatz von 7,5 Stunden pro Tag?
3) Wieviel Tage brauchen 5 Arbeiter bei einem Arbeitseinsatz von 6 Stunden pro Tag?

Lösungen

Zu 1.)

	Arbeiter	Tage	Stunden / Tag
	12	15	8
:12		•15•12•8	:8
	1	z	
•10		:10, :6	•6
	10	z	6

antipro-portional antipro-portional antipro-portional

$$Y = \frac{15\ 12\ 8}{10\ 6}$$

$$Y = \underline{\underline{24}}$$

10 Arbeiter müssen 06 Stunden täglich arbeiten, wenn sie die Arbeit in 24 Tagen fertig zu stellen haben.

Zu 2.)

	Arbeiter	Tage	Stunden / Tag
	12	15	8
•12•15•8	:15		:8
	x	1	1
:24, :7,5	•24		•7,5
		24	7,5

antipro-portional antipro-portional antipro-portional

$$Y = \frac{12\ 15\ 8}{24\ 7{,}5}$$

$$Y = \underline{\underline{08}}$$

08 Arbeiter müssen 7,5 Stunden täglich arbeiten, wenn sie die Arbeit in 38,4 Tagen fertig zu stellen haben.

Zu 3.)

	Arbeiter	Tage	Stunden / Tag
	12	15	8
:12		•15•12•8	:8
	1	z	
•05		:10, :6	•6
	5	z	6

antipro-portional antipro-portional antipro-portional

$$Y = \frac{8\ 12\ 15}{5\ 6}$$

$$Y = \underline{\underline{48}}$$

05 Arbeiter müssen 06 Stunden täglich arbeiten, wenn sie die Arbeit in 48 Tagen fertig zu stellen haben.

Anwendung in der Chemie

In der Mathematik, die der Chemie hilfreich scheint, tauchen Proportionalität und Antiproportionalität häufig auf, besonders für einfache Zusammenhänge.

Wie viel Liter Wasser muss man 30 Liter 80%igem Alkohol zusetzen, um 50%igen Alkohol zu erhalten?

$\frac{80\ AOH}{20\ HOH}$ 30 l → $\frac{24\cancel{,00}}{3\cancel{,00}}$ (kürzen wegen % !) → 24 - 6 = 18 → 18 l

anderer Weg: 30 • 0,8 = (30 + x) • 0,5 → x = 18 l

(Grundlage: → Antiproportionalität!)

Rechenmarathon – II. Teil

(1)
Mit drei Rasenmähern lässt sich eine Sportplatz mit einer Fläche von 5400 m² in 1½ Stunden schneiden. Wieviel Rasenmäher müssen mindestens eingesetzt werden, damit Sportrasen mit einer Gesamtfläche von 13500 m³ in einer Zeit von 3½ Stunden geschnitten werden kann ?

(2)
Ein Angestellter bekommt nach einer 6%igen Gehaltserhöhung 4028 DM. Wieviel hat er vorher verdient ?

(3)
Für einen Kredit von 50.000 DM müssen nach 90 Tagen 500 DM Zinsen gebracht werden. Der Zinssatz ist zu berechnen.

(4)
Der Preis für einen PKW wird von 26.600 DM wegen erhöhter Nachfrage nach den Gesetzen des Marktes auf 28462 DM erhöht. Wieviel Prozent beträgt der Preisaufschlag ?

(5)
Die Mehrwertsteuer (MwSt. = 16%) einer Ware beträgt 1227,20 DM. Wieviel kostet die Ware ?

(6)
Der Inhalt von 1200 Flaschen zu je 0,7 l Inhalt wird in 0,75 l Flaschen umgefüllt. Wie viele Flaschen werden benötigt ?

(7)
Nach einer Gehaltserhöhung um 3,2 % verdient Fräulein B. jetzt 2724,48 DM. Was hat sie vor der Erhöhung verdient ?

(8)
Die Folgende Tabelle zeigt einige Werte. Handelt es sich hierbei um Proportionalität ? (Rechne oder zeichne, denke an die Begründung!)

3	8,5	7	20	50
14,2	40,233	33,133	94,66	236,66

Beim Schularbeiten mit den Themen Proportionalität / Antiproportionalität tauchen oftmals auch Prozentrechnen und Zinsrechnung auf. Hier eine kleine Übersicht:

Prozentrechnen (einfach):

$$\frac{P}{100} = \frac{w}{G}$$

P = Zinssatz
G = Grundwert
w = Prozentwert

$$P = \frac{100 \cdot w}{G} \qquad w = \frac{G \cdot p}{100} \qquad G = \frac{100 \cdot w}{P}$$

Zinsrechnen

P = Zinssatz
K = Kapital
Z_r = Zinsen

$$Z_Y = \frac{K \cdot p \cdot t_J}{100}$$ für Jahre

$$Z_M = \frac{K \cdot p \cdot t_M}{100 \cdot 12}$$ für Monate

$$Z_T = \frac{K \cdot p \cdot t_T}{100 \cdot 360}$$ für Tage

Zinseszins

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

K_n = Kapital nach n Jahren
K_0 = Anfangskapital
n = Anzahl Jahre
q = Zinsfaktor

Nach einer Gehaltserhöhung um 3,2 % verdient Fräulein B. jetzt 2724,48 DM. Was hat sie vor der Erhöhung verdient ?

Lösungsmöglichkeit:

geg.: $G_2 = 2724{,}48$ DM $\rightarrow$ w
$p_1 = 3{,}2\%$ $\rightarrow$ 103,2%
$p_2 = 100\%$ $(p_1 + p_2)$

ges.: G_1

2724,48 = 100% + 3,2% ≙ 103,2%

Rechnung: $G_1 = \dfrac{100 \cdot G2}{(p_1 + p_2)}$

$$G_1 = \frac{100 \cdot 2724{,}48}{103{,}2\%} = \frac{27248}{103{,}2} = \underline{\underline{2640 \text{ DM}}}$$

Probe: $w = \dfrac{G \cdot p}{100} = 84{,}48$ DM

Fräulein B. hat vorher 2640 DM verdient.

$$\begin{array}{r} 2640 \\ 84{,}48 \\ \hline \underline{\underline{2724{,}48 \text{ DM}}} \end{array}$$

Ein Kapital von 2500 DM wird für 5 Jahre bei einem Zinssatz von 4% angelegt. Dabei werden anfallende Zinsen gleich wieder mitverzinst.

$K = 2500 \cdot 1{,}04^5 = 3041{,}63$ DM